Anais Eletrônico
IX EPCC – Encontro Internacional de Produção Científica UniCesumar
Nov. 2015, n. 9, p. 4-8
ISBN 978-85-8084-996-7

OS NÚMEROS PRIMOS E A HIPÓTESE DE RIEMANN

Willian Cleyson Fritsche[1], *Alexandre Shuji Suguimoto*[2]

RESUMO: O presente trabalho é constituído de pesquisa bibliográfica e possui o objetivo de disseminar o conhecimento da hipótese de Riemann, portanto, apresenta-se o conceito básico e essencial para subsidiar e incentivar estudos mais abrangentes sobre um dos maiores problemas da matemática. Estuda-se no decorrer do presente artigo o Teorema dos Números Primos, a continuação analítica da função zeta de Euler $\zeta(\sigma)$, os zeros não triviais ω da função zeta de Riemann $\zeta(s)$ e a ligação da função $\zeta(s)$ com os números primos, uma ligação extraordinária que conecta duas áreas matemáticas aparentemente distintas e fornece uma estimativa do padrão da distribuição dos números primos. Muitos matemáticos definem a matemática como o estudo dos padrões, portanto, não saber o padrão dos números primos, um conceito estudado desde o tempo dos gregos antigos e considerado os átomos da matemática é sem dúvida um problema imprescindível, no qual, a hipótese de Riemann apoiada na intrínseca conexão da função zeta $\zeta(s)$ com os números primos revela-se a melhor possibilidade de desvendar este mistério, porém, mostra-se um problema difícil que tem resistido aos esforços dos matemáticos em obter e uma demonstração ou refutação desde 1859.

PALAVRAS-CHAVE: Distribuição dos Números Primos; Função Zeta de Riemann; Hipótese de Riemann; Teorema dos Números Primos; Zeros Não Triviais da Função Zeta.

1 INTRODUÇÃO

Os números primos são estudados desde os tempos de Euclides e Eratóstenes, porém, mesmo após cerca de 2315 anos a matemática ainda é muito primitiva para desvendar seus inúmeros mistérios, no qual, o padrão da distribuição dos números primos é o mais cobiçado. Após Euclides demonstrar a infinidade dos números primos os matemáticos se depararam com a sua aleatoriedade no decorrer do conjunto dos números naturais, a localização do próximo número primo é completamente imprevisível e compreender a distribuição dos primos é um problema intrínseco à matemática.

O primeiro avanço no estudo da distribuição dos números primos ocorreu em 1792 obtido por Carl Friedrich Gauss ao conjecturar uma tendência assintótica para a função de contagem dos números primos $\pi(x)$, no entanto, Gauss manteve seu resultado em segredo até o ano de 1849 quando trocou cartas com Johann Encke e comentou sobre sua conjectura. A conjectura de Gauss foi demonstrada em 1896 independentemente por Hadamard e de la Vallée Poussin, sendo conhecida como Teorema dos Números Primos.

Influenciado pelos estudos de Gauss e pelos métodos matemáticos de Dirichlet, Bernhard Riemann mostrou em seu célebre artigo de 1859 que os zeros não triviais ω da função zeta $\zeta(s)$ estão intrinsicamente conectados com os números primos, resultando de tal conexão um padrão (peculiar e maravilhoso) da distribuição dos números primos, no entanto, para o cobiçado padrão determinado por Riemann ser verdadeiro imprescindivelmente é necessário demonstrar que "todos os zeros não triviais da função $\zeta(s)$ pertencem à reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$", denominada hipótese de Riemann.

De fato, os zeros não triviais ω da função $\zeta(s)$ intervêm na estimativa do padrão da distribuição dos números primos, portanto, para assegurar matematicamente que tal padrão manter-se-á conforme $\omega \to \infty$, a hipótese de Riemann deve ser verdadeira, ou seja, se todos os zeros não triviais da função $\zeta(s)$ localizam-se na reta crítica, a estimativa do padrão da distribuição dos números primos jamais irá alterar-se, logo, constituirá de fato um padrão.

O resultado crucial da estimativa do padrão da distribuição dos números primos é o problema matemático mais importante atualmente não resolvido, tanto que, é o único problema que faz parte da lista dos problemas de Hilbert (maiores desafios matemáticos do século 20) e da lista dos problemas do milênio (7 maiores desafios matemáticos deste milênio), além disso, faz parte da lista dos problemas de Smale (maiores desafios matemáticos do século 21) e este ano fez 156 anos que a hipótese foi formulada por Bernhard Riemann.

O presente trabalho é constituído de pesquisa bibliográfica e interpretação das informações obtidas para seu dimanar, formula-se o objetivo de disseminar o conhecimento da hipótese de Riemann e incentivar pesquisas posteriores sobre o tema, pois é fundamental que a nova geração de matemáticos esteja familiarizada com os grandes desafios desta magnífica área científica.

[1]Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Cesumar – UNICESUMAR, Maringá – PR. Bolsista PROBIC\UniCesumar. willefritsche@gmail.com
[2]Docente do curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário Cesumar – UNICESUMAR, Maringá – PR. alexandre.unicesumar@unicesumar.edu.br

Nov. 2015, n. 9, p. 4-8
ISBN 978-85-8084-996-7

2 O TEOREMA DOS NÚMEROS PRIMOS

A distribuição dos números primos é um mistério e permaneceu completamente sem compreensão até Gauss, um dos pioneiros no estudo da função de contagem dos números primos, denotado por $\pi(x)$ e definida como a quantidade de números primos $p \leq x$, buscando propriedades desta função Gauss construiu uma tabela com a razão $\frac{x}{\pi(x)}$ e percebeu um sutil comportamento surgindo conforme x aumenta, iniciando com $x = 10$ e multiplicando sucessivamente x por 10, a razão $\frac{x}{\pi(x)}$ parece proceder como se fosse uma progressão aritmética, observe a tabela

Tabela 1: Informações sobre $\pi(x)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\pi(x)}$	$\boldsymbol{\frac{x}{\pi(x)}}$	$\boldsymbol{\left(\frac{x}{\pi(x)}\right)_m - \left(\frac{x}{\pi(x)}\right)_{m-1}}$
$\mathbf{10}$	4	2.5	**--**
$\mathbf{10^2}$	25	4	**1.5**
$\mathbf{10^3}$	168	5.952	**1.952**
$\mathbf{10^4}$	1229	8.136	**2.184**
$\mathbf{10^5}$	9592	10.425	**2.288**
$\mathbf{10^6}$	78498	12.739	**2.3138**
$\mathbf{10^7}$	664579	15.047	**2.3079**
$\mathbf{10^8}$	5761455	17.356	**2.309**
$\mathbf{10^9}$	50847534	19.666	**2.309**
$\mathbf{10^{10}}$	**455052511**	**21.975**	**2.308**

Fonte: CARNEIRO, 2014.

Gauss percebeu que a diferença entre as razões (coluna 4 da tabela 1) aproxima-se de 2.3 conforme x aumenta, assim, para 10^n a razão $\frac{10^n}{\pi(10^n)}$ deve ser aproximadamente igual a $2.3\,n$, analisando uma tabela logarítmica Gauss notou que $2.3 \cong \ln 10$, logo, $\ln 10^n$ é aproximadamente igual à $\frac{10^n}{\pi(10^n)}$, portanto, quando $x \to \infty$ temos que $\ln x \sim \frac{x}{\pi(x)}$, reescrevendo $\pi(x)$ em termos de $\ln x$ obtemos $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, este é o Teorema dos Números Primos que denominaremos no decorrer do artigo como TNP, no qual, a notação ($\sim$) é transitiva e significa que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln\, x}} = 1$$

dizemos então que $\pi(x)$ tende assintoticamente à $\frac{x}{\ln x}$.

Posteriormente Gauss percebeu que a integral logarítmica $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ é uma aproximação de $\pi(x)$ melhor que $\frac{x}{\ln\, x}$, assim, refina-se o TNP à:

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

Hadamard e de la Vallée Poussin demonstraram independentemente o TNP em 1896 utilizando resultados apresentado por Riemann no artigo de 1859.

Perceba na figura 1 como $Li(x)$ (preto) fornece uma aproximação de $\pi(x)$ (vermelho) melhor que $\frac{x}{\ln\, x}$ (azul):

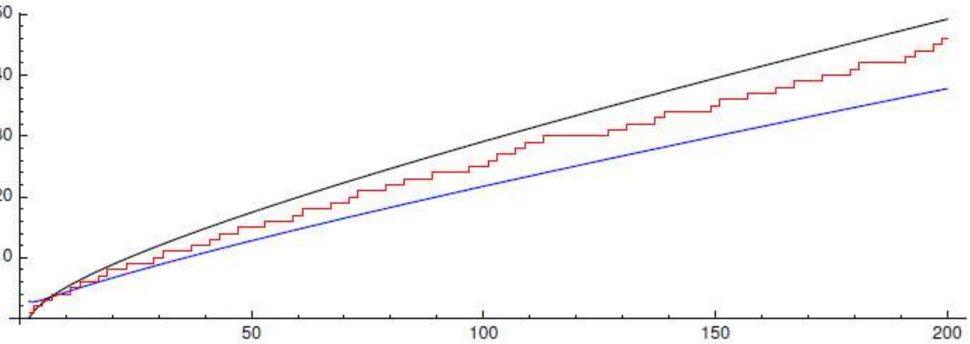

Figura 1 – Comparação da distribuição de $\pi(x)$ (vermelho), $\frac{x}{\ln x}$ (azul) e $Li(x)$ (preto)
Fonte: MAZUR; STEIN, 2015, p. 50

O TNP nos revela as seguintes propriedades fundamentais:

1. A probabilidade de x ser um número primo tende assintoticamente à $\frac{1}{\ln\, x}$;
2. O x–ésimo número primo tende assintoticamente à $\ln x^x$;
3. Apesar da aleatoriedade do seu surgimento, os números primos escasseiam-se de maneira sistemática, revelando uma fantástica regularidade.

Além da tendência assintótica que o TNP apresenta para a “curva escada” da função $\pi(x)$, Rosser e Schoenfeld mostraram em 1962 que $\frac{x}{\ln\, x} \leq \pi(x)$ para $x \geq 17$, Dusart mostrou em 1998 que $\pi(x) \leq \frac{x}{\ln\, x}\left(1 + \frac{12762}{\ln\, x}\right)$ para $x > 1$ e Littlewood mostrou em 1914 que a diferença $Li(x) - \pi(x)$ muda de sinal uma infinidade de vezes para x suficientemente grande, ou seja, até determinado valor x_k (≥ 7.6) temos que $Li(x) > \pi(x)$, porém, para $x_k < x_0 \leq x < \infty$ (te Riele mostrou em 1987 que $x_0 < 6.658 \times 10^{370}$) temos que ora $Li(x) \leq \pi(x)$ e ora $Li(x) > \pi(x)$ (mantendo a assintoticidade), logo, os resultados de Rosser, Schoenfeld, Dusart e Littlewood refinam o conhecimento sobre a “curva escada” de $\pi(x)$.

3 A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E OS ZEROS NÃO TRIVIAIS

Leonhard Euler resolveu o problema da Basileia mostrando que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e generalizou esta série definindo a função $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ que é uniformemente convergente na semirreta $\sigma_0 \leq \sigma < \infty$ para todos os números reais $\sigma_0 > 1$, denominada função zeta de Euler $\zeta(\sigma)$. Euler também percebeu uma fantástica relação entre $\zeta(\sigma)$ e os números primos que ocorre pelo produto euleriano, uma expressão analítica da fatoração única de inteiros como produto de números primos p, portanto, define-se a função $\zeta(\sigma)$ como:

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{-1}, \quad para\ \sigma > 1$$

através de $\zeta(\sigma)$ Euler desenvolveu uma demonstração da infinidade dos números primos que é indireta e por absurdo.

Riemann percebeu que poderia realizar a continuação analítica de $\zeta(\sigma)$ para todo o plano complexo ($\mathbb{C}$) exceto $s = 1$, onde existe um pólo simples, assim, obtendo a denominada função zeta de Riemann $\zeta(s)$ com $s \in \mathbb{C}$, definida como uma função meromorfa obtida da continuação única de $\zeta(\sigma)$ para todo o plano complexo $s \neq 1$. Para realizar a continuação analítica inicialmente define-se $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s) > 1$, no qual, o produto euleriano é válido e a relação com os números primos permanece, logo:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}, \quad para\ \mathcal{Re}(s) > 1$$

a série é totalmente convergente para $\mathcal{Re}(s) > 1$.

A continuação analítica de $\zeta(s)$ para o restante do plano complexo é realizada em dois passos, primeiramente realiza-se a continuação para $\mathcal{Re}(s) > 0$ (assim $\zeta(s)$ é definida para o restante do semiplano complexo com parte real positiva), para esta continuação define-se a função zeta alternada, denominada função eta de Dirichlet $\eta(s)$:

Anais Eletrônico
IX EPCC – Encontro Internacional de Produção Científica UniCesumar
Nov. 2015, n. 9, p. 4-8
ISBN 978-85-8084-996-7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=(1-2^{1-s})\zeta(s)$$

reescrevendo $\zeta(s)$ em termos de $\eta(s)$ obtemos:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \qquad para\ \mathcal{Re}(s)>0$$

a série é totalmente convergente para todo $s\neq 1$ com $\mathcal{Re}(s)>0$, portanto, fornece a continuação analítica de $\zeta(s)$ para o restante do semiplano complexo com parte real positiva, exceto $s=1$. Perceba que assumindo o valor $s=1$, no primeiro termo na direita da igualdade ocorre $\frac{1}{1-2^{1-1}}=\frac{1}{0}$, logo, $\zeta(s)$ possui um pólo simples de resíduo 1 em $s=1$, ou seja, $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1$.

Conhecendo $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)>0$ pode-se realizar a continuação analítica de $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)\leq 0$, para esta continuação define-se a equação funcional demonstrada por Riemann:

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{s\,\pi}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s), \qquad para\ \mathcal{Re}(s)\leq 0$$

onde $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{s-1}\,du$ é a função gama para $\mathcal{Re}(s)>0$.

$\zeta(s)$ satisfaz a relação de reflexão da equação funcional, perceba que $\zeta(1-s)=\zeta(0)$ se, e somente se $s=1$, que é o pólo simples de $\zeta(s)$, felizmente pode-se obter o valor de $\zeta(0)$ pela equação funcional através do limite:

$$\zeta(0)=\lim_{s\to 1}2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{s\,\pi}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)=-\frac{1}{2}$$

para o restante dos valores de $\zeta(s)$ com $\mathcal{Re}(s)\leq 0$ perceba, por exemplo, se $s=1.1$ sabemos calcular $\zeta(1.1)$ e pela equação funcional obtém-se $\zeta(-0.1)$, se $s=1+i$ sabemos calcular $\zeta(1+i)$ e pela equação funcional obtém-se $\zeta(-i)$ (lembre-se que as variáveis complexas s são simétricas em relação ao eixo real), assim, obtemos qualquer valor de $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)<0$ utilizando $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)>1$ e $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)=0$ tal que $\mathcal{Im}(s)\neq 0$ utilizando $\zeta(s)$ para $\mathcal{Re}(s)=1$ com $\mathcal{Im}(s)\neq 0$.

A equação funcional de $\zeta(s)$ é totalmente convergente para $\mathcal{Re}(s)\leq 0$, logo, fornece a continuação analítica para todo o semiplano complexo com $\mathcal{Re}(s)\leq 0$, portanto, concluímos a extensão do domínio de definição da função $\zeta(s)$ para todo o plano complexo $s\neq 1$. A função $\zeta(s)$ (definida em todo o plano complexo $s\neq 1$) possui várias propriedades importantes, no qual, as propriedades fundamentais sobre os seus zeros são:

1. $\zeta(s)\neq 0$ para $\mathcal{Re}(s)>1$, garantido pelo produto euleriano;
2. $\zeta(-2n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, ou seja, todos os inteiros pares negativos anulam a função $\zeta(s)$ e são denominados zeros triviais (pois são zeros reais);
3. Se $s=\omega\neq -2n$, então, $\zeta(s)=0$ se, e somente se, $\mathcal{Im}(s)\neq 0$ e $0<\mathcal{Re}(s)<1$, denominados zeros não triviais ω (pois não são zeros reais);
4. Existem infinitos zeros não triviais ω de $\zeta(s)$ e todos se localizam na região $0<\mathcal{Re}(s)<1$, denominada faixa crítica;
5. Os zeros não triviais ω estão dispostos simetricamente em relação ao eixo real e também em relação à reta $\mathcal{Re}(s)=\frac{1}{2}$, denominada reta crítica.

Os zeros triviais de $\zeta(s)$ são todos conhecidos, portanto, o foco passa a ser os zeros não triviais ω de $\zeta(s)$, para entender a disposição dos zeros não triviais ω ao longo da faixa crítica considere o gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ (figura 2), cujo parece uma cadeia de montanhas com a superfície estendendo-se até o nível do 0:

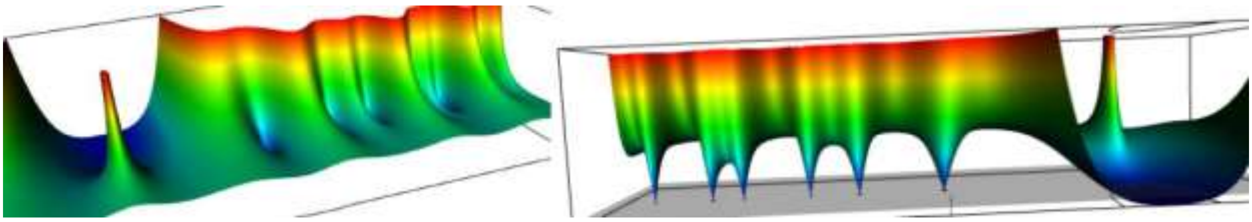

Figura 2 – Gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ com $-4 \leq \mathcal{Re}(s) \leq 4$ e $-10 \leq \mathcal{Im}(s) \leq 40$
Fonte: NIST Digital Library of Mathematical Functions

No gráfico tridimensional da esquerda, o "pico solitário" é formado pelo pólo simples $s = 1$ e estendesse para o infinito, pode-se localizar os zeros não triviais ω de $\zeta(s)$ que são os pontos mais profundos dos "buracos" na encosta da cadeia de montanhas, por outra perspectiva, no gráfico tridimensional da direita, também pode-se visualizar o pólo simples $s = 1$, mas o que nos interessa são as formas que lembram "estalactites" e interceptam o plano (cinza) em um único ponto que são os zero não trivial ω. Perceba que os primeiros zeros não triviais ω estão alinhados, considerando um plano que intercepta verticalmente o gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ e passa pelos primeiros zeros não triviais ω, obtemos a figura 3:

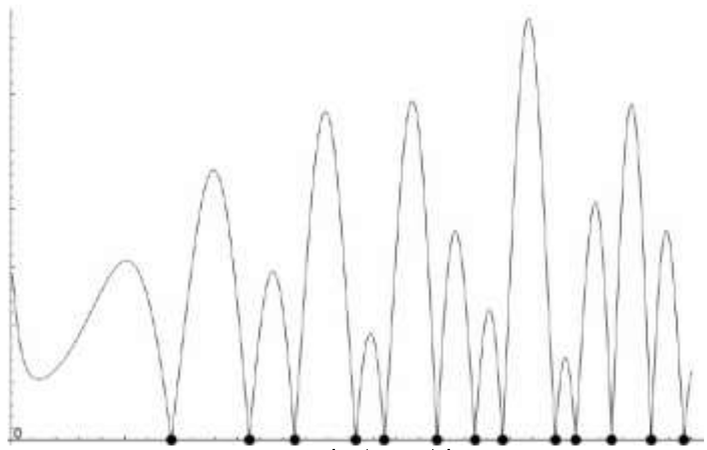

Figura 3 – Gráfico de $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$ para $0 \leq t \leq 60$
Fonte: BAUGH, 2007, p. 5

A intersecção do plano está no ponto $\frac{1}{2}$ do eixo real, ou seja, é exatamente na reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$, logo, todos os primeiros zeros não triviais ω de $\zeta(s)$ (pontos do gráfico da figura 3) são da forma $\omega = \frac{1}{2} + it$, Riemann não acreditava que este fato era coincidência, portanto, conjecturou em seu artigo de 1859:

Hipótese de Riemann. Todos os zeros não triviais da função $\zeta(s)$ pertencem à reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Riemann também mostrou que o número $N(T)$ de zeros não triviais ω com $0 < \mathcal{Im}(s) \leq T$ na faixa crítica $0 < \mathcal{Re}(s) < 1$ tende assintoticamente à $\frac{T}{2\pi}\left(\ln \frac{T}{2\pi} - 1\right)$, posteriormente em 1905 von Mangoldt mostrou que:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\ln \frac{T}{2\pi} - 1\right) + O(\ln\, T)$$

denominada fórmula de Riemann-von Mangoldt, onde $O(\ln\, T)$ (notação O-grande) significa que $\left|N(T) - \frac{T}{2\pi}\left(\ln \frac{T}{2\pi} - 1\right)\right| \leq d \ln\, T$ com o múltiplo constante $d < 0.14$.

Precisamente, para $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (zeros não triviais ω na reta crítica) a fórmula de Riemann-von Mangoldt denota-se $N_0\,(T)$, como $N(T)$ conta todos os zeros não triviais ω na faixa crítica, inclusive, os da reta crítica, enquanto $N_0\,(T)$ conta somente os zeros não triviais ω na reta crítica, obviamente temos que $N_0\,(T) \leq N(T)$ para qualquer intervalo $[1, T]$ da faixa crítica com $T \to \infty$, portanto, a hipótese de Riemann afirma que $N_0(T) = N(T)$ para qualquer que seja o intervalo $[1, T]$ com $T \to \infty$.

Godfrey Hardy demonstrou em 1914 que existem infinitos zeros não triviais ω de $\zeta(s)$ pertencentes à reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$, mas apesar de ser um grande resultado não significa que todos os zeros não triviais ω estejam na reta crítica, podem existir infinitos zeros não triviais de $\zeta(s)$ em outros pontos da faixa crítica, inclusive, apenas um zero não trivial ω não pertencente à reta crítica seria suficiente para mostrar que a hipótese de Riemann é falsa (seria um contraexemplo), no entanto, atualmente são conhecidos mais de 10 trilhões de zeros não triviais de $\zeta(s)$ e todos pertencem à reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Bohr e Landau demonstraram em 1914 que todos, exceto uma proporção infinitesimal de zeros não triviais ω estão muito próximos da reta crítica, além disso, Brian Conrey demonstrou em 1989 que no mínimo 40% dos zeros não triviais ω estão na reta crítica, ou seja, não importa a quantidade de zeros não triviais de $\zeta(s)$ que se considera, no mínimo 40% desta quantidade de zeros não triviais ω sempre estará na reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$.

4 NÚMEROS PRIMOS E A HIPÓTESE DE RIEMANN

Sabemos que a função $\zeta(s)$ está relacionada com os números primos pelo produto euleriano, mas, além disso, os zeros não triviais ω de $\zeta(s)$ estão intrinsicamente relacionados com os números primos, inclusive, o fato de não existir zeros não triviais ω nas retas $\mathcal{R}e(s) = 1$ e $\mathcal{R}e(s) = 0$ é equivalente ao TNP (que é o resultado demonstrado mais importante sobre a distribuição dos números primos), de fato, a intrínseca conexão entre os zeros não triviais ω e os números primos expandiu o horizonte matemático, mostrando inúmeras novas possiblidades.

A conexão entre os números primos e os zeros não triviais de $\zeta(s)$ é devido à relação obtida por Riemann em 1859 entre a função $\pi(x)$, a função $J(x)$ (definida por Riemann) e os zeros não triviais ω. Riemann inicialmente considerou todas as potências dos números primos $p^m \leq x$, atribuindo a cada número primo p^m o peso $\frac{1}{m}$, assim, define-se a função $J(x)$ como:

$$J(x) = \begin{cases} \pi(x) + \dfrac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dfrac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \cdots - \dfrac{1}{2m}, & se\ x = p^m\ com\ m \geq 1; \\ \pi(x) + \dfrac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dfrac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \cdots, & se\ x > 0\ tal\ que\ x \in \mathbb{R}\ e\ x \neq p^m\ com\ m \geq 1. \end{cases}$$

Perceba que $J(x)$ é uma soma finita, pois extraindo as raízes com índices cada vez maiores, x torna-se cada vez menor e em algum momento (não importando a grandeza de x) $\sqrt[d]{x}$ será menor que 2, portanto, como não existem números primos $p < 2$ a função $\pi(\sqrt[d]{x}) = 0$.

A função $J(x)$ possui duas características extremamente importantes, a primeira é que podemos aplicar a inversão de Möbius e definir a função $\pi(x)$ em termos de $J(x)$, logo:

$$\pi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} J(\sqrt[n]{x})$$

onde $\mu(n)$ é a função de Möbius definida como:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1; \\ 0, & se\ n\ tem\ um\ fator\ quadrado; \\ (-1)^r, & se\ n\ é\ produto\ de\ r\ números\ primos\ distintos. \end{cases}$$

Em um primeiro momento esta característica de $J(x)$ não revela sua importância, porém, a segunda característica importante de $J(x)$ nos mostra a seguinte igualdade:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\omega} Li(x^{\omega})$$

que possui a seguinte fórmula explícita (que é mais comum) proposta por Riemann e demonstrada por von Mangoldt:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\omega} Li(x^{\omega}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1)\ln t} - \ln\ 2$$

onde a somatória é estendida a todos os zeros não triviais ω de $\zeta(s)$, cada um contado com sua multiplicidade, a integral logarítmica $Li(x^{\omega})$ como intervêm variáveis complexas (ω) é distinta da definição usual, assim, pode-se defini-la para os zeros não triviais ω como:

$$Li(x^{\omega}) = Li(e^{\omega\ \ln\ x}) = \int_{-\infty}^{\omega \ln x} \frac{e^t}{t} dt + \pi i$$

com $\mathcal{I}m(\omega) \neq 0$ e como os zeros não triviais ω são simétricos em relação ao eixo real considera-se na definição apenas $\mathcal{I}m(\omega) > 0$.

Este resultado é esplêndido, neste momento a primeira característica de $J(x)$ revela sua importância, pois se podemos escrever $\pi(x)$ em termos de $J(x)$ e podemos escrever $J(x)$ em termos dos zeros não triviais ω, logo, podemos escrever $\pi(x)$ em termos dos zeros não triviais ω, de fato:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li\left(\sqrt[n]{x}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\omega} Li\left(\sqrt[n]{x^{\omega}}\right), \tag{1}$$

o primeiro termo (positivo) na direita da igualdade é uma função que fornece uma excelente aproximação de $\pi(x)$, denominada função de Riemann $R(x)$:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li\left(\sqrt[n]{x}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\,\zeta(n+1)} \frac{(\ln\, x)^n}{n!}$$

a última igualdade mostra a denominada fórmula de Gram, no qual, sua série converge rapidamente e permite calcular a função $R(x)$. Observe na figura 4 como $R(x)$ (azul) fornece uma aproximação de $\pi(x)$ (vermelho) melhor que $Li(x)$ (roxo):

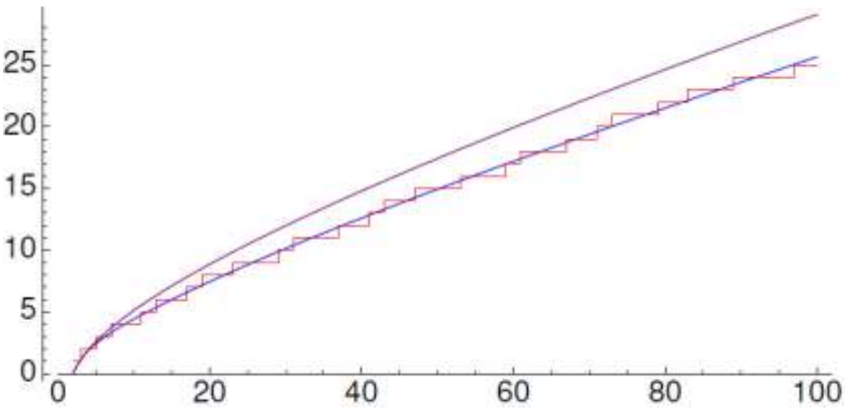

Figura 4 – Comparação da distribuição de $\pi(x)$ (vermelho), $Li(x)$ (roxo) e $R(x)$ (azul)
Fonte: MAZUR; STEIN, 2015, p. 124

O segundo termo (negativo) de (1) é o termo de erro da aproximação de $R(x)$ para $\pi(x)$:

$$\sum_{\omega} R(x^{\omega}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\omega} Li\left(\sqrt[n]{x^{\omega}}\right)$$

com a somatória estendendo-se a todos os zeros não triviais ω da faixa crítica, cada um contado com sua multiplicidade (atualmente são conhecidos apenas zeros não triviais ω simples, ou seja, com multiplicidade 1).

O termo de erro faz com que a suave curva de $R(x)$ seja distorcida aproximando-se mais da "curva escada" de $\pi(x)$, ou seja, o termo de erro corrige a aproximação de $R(x)$ para $\pi(x)$ e quanto mais zeros não triviais ω intervir, mais precisa torna-se a aproximação de $R(x)$ para $\pi(x)$. Observe na figura 5 como o termo de erro estendido à 50 zeros não triviais ω modifica a curva de $R(x)$ (azul) aproximando-se mais da "curva escada" de $\pi(x)$ (vermelho):

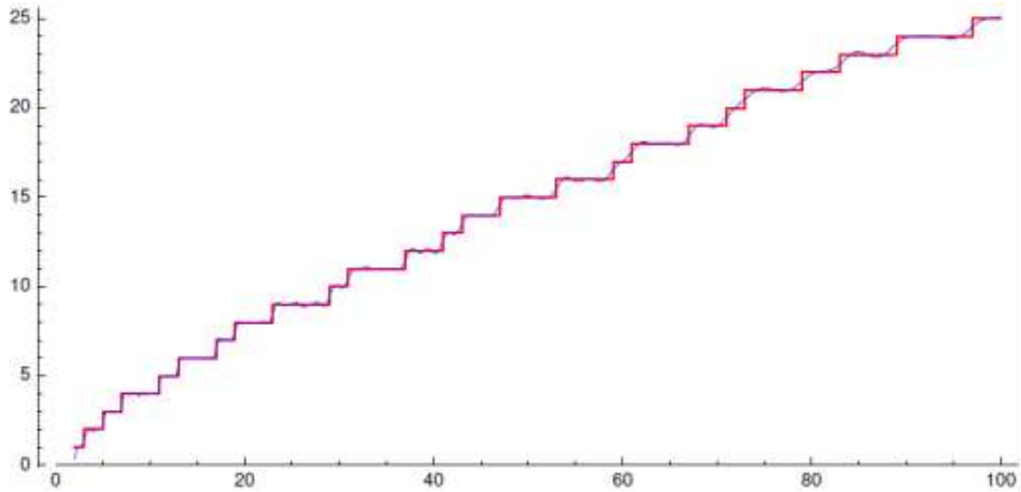

Figura 5 – $\pi(x)$ (vermelho) e $R(x)$ (azul) com termo de erro estendido à 50 zeros não triviais
Fonte: MAZUR; STEIN, 2015, p. 126

Compare a curva de $R(x)$ na figura 4 com a figura 5 e perceba como a correção é incrível, obviamente todos os 50 zeros não triviais ω intervindo no termo localizam-se na reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$, logo, temos duas considerações:

1. Se a hipótese de Riemann é verdadeira o termo de erro comporta-se como visto na figura 5 (fazendo a curva de $R(x)$ aproximar-se da "curva escada" de $\pi(x)$) para todos os zeros não triviais ω, ou seja, como todos os zeros não triviais ω pertencem à reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$ o termo de erro jamais terá um comportamento inesperado conforme $\omega \to \infty$, logo, a seguinte igualdade é totalmente verdadeira:

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\omega} R(x^{\omega})$$

Precisamente, se a hipótese de Riemann for verdadeira, a aleatoriedade do surgimento dos números primos se transformaria em certa regularidade pela estabilidade de todos os zeros não triviais ω na reta crítica, ou seja, teríamos um padrão (o melhor possível, peculiar como os números primos) da distribuição dos números primos.

2. Se a hipótese de Riemann é falsa existem zeros não triviais ω não pertencentes à reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$ que fazem o termo de erro distanciar a curva de $R(x)$ da "curva escada" de $\pi(x)$ ao invés de aproximar, assim, o padrão da distribuição dos números primos determinado por Riemann e toda a matemática sustentada pela hipótese de Riemann revelar-se-ia falso.

O conhecimento de regiões livres de zeros não triviais ω também conduz a melhores estimativas de função ligadas à distribuição dos números primos, como O-grande para o erro do TNP. As estimativas para o termo de erro do TNP podem considerar ou não a veracidade da hipótese de Riemann, porém, as estimativas desenvolvidas que consideram a veracidade da hipótese são mais rigorosas.

Von Koch mostrou em 1901 que se a hipótese de Riemann for verdadeira, então:

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

onde O-grande $\left(O\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)\right)$ significa que $\pi(x)$ e $Li(x)$ têm uma diferença limitada quando $x \to \infty$ por um múltiplo constante positivo c de $\sqrt{x}\,\ln x$, ou seja:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq c\,\sqrt{x}\,\ln x$$

O resultado de von Koch nos mostra que se a hipótese de Riemann for verdadeira a curva do termo de erro da aproximação de $Li(x)$ para $\pi(x)$ está limitada entre a curva $c\,\sqrt{x}\,\ln x$ e sua curva simétrica conforme $x \to \infty$, ou seja, o termo de erro jamais atravessa (necessariamente a partir de um determinado ponto) os limites estabelecidos pelas curvas $c\,\sqrt{x}\,\ln x$ e $-c\,\sqrt{x}\,\ln x$, tal fato implica que o termo de erro independentemente de como se comporte entre as curvas limites, não possui quedas e\ou saltos que atravessam as curvas limites inesperadamente e descontroladamente conforme $x \to \infty$, assim, fornece uma noção matemática de como se comportaria o termo de erro da aproximação de $Li(x)$ para $\pi(x)$.

Além disso, o resultado de von Koch é equivalente à hipótese de Riemann, ou seja, se pudéssemos mostrar que $|\pi(x) - Li(x)| \leq c\sqrt{x}\ln x$, a hipótese de Riemann se seguiria de imediato, pois um implica o outro.

5 CONCLUSÃO

De fato, a hipótese de Riemann é muito importante para a distribuição dos números primos e muito mais abrangente que os breves comentários no presente artigo. Possivelmente a matemática ainda seja primitiva para subsidiar uma demonstração da hipótese de Riemann ou um dia revelar-se-á a sua falsidade, talvez a hipótese de Riemann seja verdadeira, mas não exista uma demonstração rigorosa da sua veracidade, tal fato (de certa maneira perturbador) é possível pelos Teoremas da Incompletude de Gödel, porém, felizmente é uma possibilidade remota pelas inúmeras formas equivalentes da hipótese de Riemann, inclusive, a hipótese possui implicações em áreas distantes da Teoria dos Números, como na física quântica.

Existem muitas evidências favoráveis à hipótese de Riemann, fazendo com que a maioria dos matemáticos acredite na sua veracidade, contudo, existem alguns motivos (matematicamente dizendo) que comprometem a veracidade da hipótese, fundamentando os argumentos de matemáticos que acreditam na falsidade da hipótese de Riemann.

Não há como saber aonde a hipótese de Riemann nos levará, no entanto, independentemente de onde chegarmos, desejamos que a matemática sempre seja a maior beneficiada.

REFERÊNCIAS

BAUGH, D. D. **The cycle problem:** an intriguing periodicity to the zeros of the Riemann zeta function. Dez. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0712.0934>. Acesso em: Ago. 2015.

CARNEIRO, E. **Hipótese de Riemann, Espaços de Hilbert e Análise de Fourier**. VII Simpósio Nacional/ Jornada de Iniciação Científica, Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=vII-simposio-nacional-ic>. Acesso em: Ago. 2015.

DERBYSHIRE, J. **Obsessão Prima**. 1.ed. Rio de Janeiro: Record, 2012. 447 p.

DEVLIN, K. **Os Problemas do Milênio**. In: ______. *A música dos Primos*: A hipótese de Riemann. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Cap. 1, p. 33-88.

MAZUR, B.; STEIN, W. **Prime Numbers and the Riemann Hypothesis**. Abr. 2015. Disponível em: <http://www.wstein.org/rh/rh.pdf>. Acesso em: Ago. 2015.

OLIVEIRA, W. D. **Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos**. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/110605>. Acesso em: jul. 2015.

RIBENBOIM, P. **Números Primos:** Velhos Mistérios e Novos Recordes. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 328 p.

SPENTHOF, R. **Primos:** da aleatoriedade ao padrão. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/582>. Acesso em: Jul. 2015.

WEISSTEIN E. W. **Riemann Zeta Function Zeros**. De MathWorld – A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html>. Acesso em: Ago. 2015.

WOLF M. **Will a physicists prove the Riemann Hypothesis?**. Out. 2014. Disponível em: <http://xxx.lanl.gov/abs/1410.1214>. Acesso em: Jul. 2015.